Një kërkim, i dështuar, i barazisë

"Njerëzit lindin me aftësi të ndryshme. Po të jenë të lirë, nuk janë të barabartë. Dhe po të jenë të barabartë, nuk janë të lirë," na thotë Solzhenicini. Vini re që në pohimin kushtor të mësipërm ka tri ndryshore: aftësia individuale (kapaciteti), liria dhe barazia. Në analitikë, për të kuptuar dhe vlerësuar ndërveprimet e të trijave, duhet mbajtur së paku njëra prej tyre e pandryshuar: për shembull, ç'do të ndodhte me lirinë dhe barazinë në qoftë se njerëzit do të kishin aftësi të barabarta? Ç'do të ndodhte me një popullatë njerëzish të njëjtë (për aq sa kjo është e mundur) në lindje, lidhur me barazinë e tyre të mëvonshme (pra pasi të kenë jetuar) në kushte lirie të plotë? Pyetje të tilla, të paprovueshme drejtpërdrejt dhe të pavëzhgueshme, kërkojnë eksperimentet e mendimit dhe simulimin shkencor (komunat utopike që të vijnë ndërmend mirëfilli, bashkë me skena të filmit *Easy Rider*, janë shumë dëshirore për t'i quajtur përpjekje shkencore).

Rrekja e mëposhtme synon një eksperiment mendimi përmes simulimit matematik në kushtet më të thjeshta e parake që mund të mendohen ku në vend të njerzve të ndërlikuar, veprues me vetinë e të mësuarit, përshtatjes me rrethinën dhe komunikimit mes tyre, mund të përdoren thërrmija elementare të thjeshtëzuara në nivelin fundor të pikës materiale, me fakultetin e domosdoshëm të lëvizjes. Jo rrallë çuarja e kushteve të një dukurie në skajet e tyre, ndihmon shumë në të kupruarit e thelbit të dukurisë. Pra: nga qenia më e ndërlikuar, njeriu, kalohet tek ana tjetër, pika materiale, pa asnjë veti tjetër veç ndërrimit të vendndodhjes nga koha në kohë.

Nga të treja ndryshoret e sipërpërmendura (liria, njëjtësia, barazia), kjo e fundit është ajo më intriguesja, për shkakun e thjeshtë të përmbajtjes së krahasimit me të ngjashmit, por edhe për shkak të një kundërshtie të brendshme konceptuale, si dhe të mosarritjes sizifiane të saj në përpjekjet e pafundme të njerëzimit.

Operatori i barazimit "=" është ndoshta më i përdoruri ndër operatorët matematikë. Dhe me siguri më i keqkuptuari. Një objekt nuk është i njëjti në dy çaste të ndryshme kohore, pra jo i barabartë tani me ç'ish më parë. Dy objekte të ndryshme nuk mund të jenë të njëjtët në të njëjtën kohë të dhënë. Pra, barazia dhe koha e përjashtojnë njëra-tjetrën dhe ajo që e marrim si barazi, në fakt është një relacion, një krahasim i objekteve jo të njëjta. 5+2 nuk është i njëjtë me 4+3. Shprehja "të krahasosh mollët me portokallet" kërkon të krahasohen mollët me mollë, duke nënkuptuar se "gjithë mollët janë krijuar të njëjta", çka dihet se nuk është e vërtetë: Çdo mollë është një njësi vetmore dhe e papërsëritshme e materies. Dhe papërsëritshmëria është diçka gjithpërfshirëse dhe thelbore, që shkon deri te koncepti bazë i “asgjësë së perceptuar”: Zeroja numerike. Nuk ka dy zero të njëjta! Zeroja është relacion dhe mund të ekzistojë vetëm si e tillë. Zeroja në vetvete, si e dhënë e parë, është e pamundur. I vetmi numër që ekziston (gjithnjë si e dhënë e parë) është njëshi. Gjithë numrat e tjerë janë relacione (të shprehura formalisht dhe formulisht përmes operatorëve matematikë, barazimi përfshirë) të ngritura mbi njëshin. Për shembull, numrat racionalë: në të vërtetë nuk ekziston diçka si ½, ajo është thjesht 1/(1+1), apo racionalët e pafundëm si 1/(1+1+1). Megjithë pamundësinë e vet, ose ndoshta pikërisht prej asaj pamundësie, barazia ka hyrë në jetët tona si një nocion themelor, e në daçi, si qëllim fundor, si njëlloj *KPI* (*key performance indicator*) i shoqërisë njerëzore, i stërpërdorur dhe me vetinë e qëllimit, synimit, idealit. Është pjesë përbërëse e trinisë së re të shenjtë: Liri-Barazi-Vëllazëri.

Në teorinë e Lojës së Pakicës (*Minority Game Theory*) mësohet për simulimet kompiuterike të agjentëve krejtësisht të barabartë, me aftësinë e të mësuarit dhe përshtatjes, që lihen të lirë të zhvillohen dhe pëfundojnë pa përjashtim në pabarazi, me gjithë pikënisjen prej të barabartësh. Nisur nga e njëjta premisë simulimi, le të shtjellojmë pra rastin më të thjeshtuar të mundur që u tha më lart: një shoqëri pikash materiale me pikënisje të njëjtë, që lëvizin lirisht në një hapësirë tripërmasore, të pavarura nga njëra-tjetra, pa ndikim te dhe të pandikueshme nga njëra-tjetra, me aftësi të njëjtë për të lëvizur në mënyrë të rastësishme (brauniane), domethënë gjatësia e hapit të tyre ka një shpërndarje normale me të njëjtën pritshmëri dhe variancë, drejtim-kahu tripërmasor i çdo hapi është krejt i rastësishëm, dhe për të njëjtën pikë materiale, hapat e lëvizjes janë të pavarur nga njëri-tjetri, hapi i dytë është i pavaruar nga i pari, i treti nga i dyti dhe i pari e kështu me radhë (*memoryless property*). Çdo pikë lejohet të ketë të njëjtin numër hapash për njësi të kohës (veprimtari të njëjtë lëvizjeje). Nuk ka kurrëfarë drejtimi apo kahu të përcaktuar në lëvizjen e pikave, çdo drejtim dhe kah ka gjasë të njëjtë të ndodhë. Pikat kanë vetëm vetinë e brendshme të lëvizjes dhe asnjë shtysë tjetër të jashtme. Barazia mes tyre është pothuaj absolute, ose më e mundura për t’u arritur. Lëvizja e tyre është krejtësisht e rastësishme. Në lidhje me largësinë e përshkuar dhe vendndodhjen e tyre në hapësirën tripërmasore euklidiane, asnjëra nuk ka diçka më shumë apo më pak se shoqja. I vetmi ndryshim midis pikave në lëvizje në hapsirën tripërmasore, ajo ç’ka do ta bënte barazinë të kryekrejtshme po të ish e njëjta për çdo pikë dhe hap lëvizjeje (lexo kohë), është treshja e vektorëve dimensionalë: për të njëjtën madhësi kërcimi ka një pafundësi kombinimesh të vektorëve përkatës tredimensionalë (*3D vectors*). Barazia në gjatësinë e hapit përmban pabarazinë në komponentet projeksionale që e përftojnë atë barazi. Të qenët i barabartë arrihet duke qenë të ndryshëm në një nivel më të ulët. Gjasa e vektorëve 3D të barabartë për çdo hap është në kufijtë e ngjarjes së pamundur, si për të njëjtën pikë në kërcime të ndryshme, edhe për pika të ndryshme për të njëjtin kërcim të radhës. Themi "në kufijtë" e ngjarjes së pamundur, pasi një lëvizje identike e të gjitha pikave, pra ndodhja hapsinore e njëjtë e tyre në çdo kohë të lëvizjes, është njëra nga mundësitë e panumërta të vetë lëvizjes. Gjasa që ajo të ndodhë ështe raporti i njëshit me pambarimësinë e mundësive të tjera, dhe numerikisht nuk mund të shkohet më afër zeros se kaq. Nga ky këndvështrim, zeroja është e pamundur pikërisht prej mundësisë (sado teorike) të një lëvizjeje ku të gjitha pikat shkojnë në të njëjtën vendndodhje pafundësisht prej rastësisë. Pra edhe një herë, barazia është çështje perceptimi; praktikisht, po u lëviz, do të ketë pabarazi, ose nuk mund të ketë lëvizje pa pabarazi. Për rastin teorik të lëvizjes së të gjitha pikave në të njëjtën vendndodhje, koha nuk ndikon në ndryshueshmërinë e konfiguracionit hapsinor të bashkësisë së pikave. Në atë nivel, koha nuk ekziston si mënyrë e perceptimit të materies. Në atë nivel nuk ka lëvizje; kjo është diçka e ngjashme me konceptin e Zeros Absolute (zero gradë Kelvin), ku lëvizja molekulare ndalon, por jo ajo atomike. Pra lëvizja ndalon brenda lëvizjes.

Sidoqoftë, pabarazia e qenies dhe ajo e arritjes janë dy gjëra të ndryshme, dhe qëllimi ynë është arritja e elementëve me barazinë më të madhe të mundur, për rastin madhësi e barabartë hapi në lëvizje dhe liri e pakufizuar në drejtimet e çdo hapi, që sendërton konceptin e rastësisë së përkryer: Informacioni për hapin paraprak nuk jep asnjë informacion ose dije për hapin e mëpasëm. Në këtë rast padija dhe pavarësia shkrihen në një.

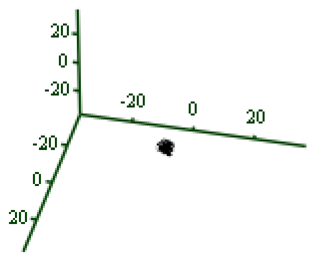
Pas një kohe të caktuar, pra numër të njëjtë hapash për çdo pikë, shpërndarja e vendndodhjes së çdo pike me nisje të njëjtë do të na tregonte zhvillimin e bashkësisë së tyre. Në qoftë se udha e përshkuar do të bashkëshoqerohej me idenë e "arritjes" (*performance*), lëvizja mund të shikohej edhe si konkurrencë mes tyre për largësinë më të madhe, duke i njerëzuar kështu pikat materiale siç bëjmë gjithë kohën me të gjithë natyrën e vëzhgueshme prej nesh, megjithëse në simulimin tonë nuk ka asgjë të tillë: Pikat pra, nuk kanë qëllime. Lëvizja rastësore është mënyra e të qenit të tyre dhe barazia në aftësinë për lëvizje është e dhënë. Të gjithë treguesit e sistemeve fizike, si energjia e lirë, entropia apo entalpia, janë rezultat i vetishëm i lëvizjes materiale, numerikisht i konsakruar prej ligjit të numrave të mëdhenj, dhe jo të dhëna të para, të cilave natyra duhet "t'iu bindet”, pasi kjo e fundit do ta shndërronte termodinamiken në një lloj shkencor feje, siç edhe bën parreshtur e çdo ditë në frazat e stërpëdorura të tipit “sipas ligjit të dytë të termodinamikës…”

“Pika materiale” si e tillë ka nevojë për sqarim, pasi përmban së brendshmi një kundërshti (*oxymoron*): në qoftë materiale nuk mund të jetë pikë dhe anasjelltas. Pika nuk ka përmasë, më saktë çdo përmasë e saj është zero (një relacion!) Materia pa përmasë, pra pa hapësirë, zhvishet nga një përbërës themelor i saj. Nga ana tjetër, për simulim të përsosur të pikënisjes së njëjtë në kohë dhe hapësirë të bashkësisë së pikave, këto kërkohet të jenë pa përmasë, në mënyrë që mbivënia e tyre të jetë edhe e mundur, edhe tërësore. Kjo kundërshti është themelore dhe ka një nënshtrat tërësisht filozofik. Qasja materialiste filozofike e kërkon me domosdo materien diskrete, pra qenien e një grimce fundore dhe të pandashme. Koncepti atomik i botës është një shkrepëtimë gjeniale e grekëve të vjetër. Ai që u quajt atom më vonë nuk ka të bëjë me atomos-in grek, i cili ishte konceptual dhe jokimik: grekët nuk i njihnin laboratorët dhe as CERN nuk kishin. Qenia e grimcës elementare është e mundur prej pandashmërisë së saj, dhe do të thotë këtë të fundit. Dhe pandashmëri do të thotë mungesë hapësire, ku koncepti i “fillimit” apo “fundit” zhbëhet, siç ndodh edhe me atë të përshkimit të një udhe apo largësie. Nuk mund të flitet as për segmentin si të tillë, që është një bazë e hapsirës dypërmasore $\mathbf{R}^2$. Dhe natyrisht nuk mund të flitet as për kohë, dhe as për vazhdimësinë kohë-hapsirë. Grimca elementare e mirëfilltë (ose pika materiale) është ai nivel i materies ku hapësira është e paqenë dhe e pamundur. Hapësira (dhe koha) janë mënyra të perceptimit të materies në nivelin mbi grimcën elementare. Ndërkaq grimca elementare nuk do të thotë “Asgjë”. Dy grimca elementare janë më shumë se një (ndërsa konceptualisht “dy asgjë” do të ishin baraz me “një asgjë” baraz me asgjë). Ato janë qenie “pa përmasë” sepse përmasa në to është e pamundur dhe si rrjedhojë e pamatshme. Ato janë ajo çka numri një (1) përfaqëson thelbësisht. Në këtë vështrim, përplasja midis materializmit dhe idealizmit (ne daçi edhe e Kreacionizmit) është një “luftë” midis njëshit dhe zeros. Njëshi materialist është i pakrijueshëm dhe i pandashëm, siç është edhe zeroja idealiste, por ai është i mbledhshëm. Ai mund të krijojë relacione (pa fund) si dhe një gjithësi (gjithashtu pa fund), gjëra që zeroja nuk i realizon dot. Ai është një fillesë e mirëqenë dhe gjithnjë në bashkësi (shoqëri njëshash). Pa bashkësinë, njëshi nuk do të mund të shfaqte asnjë veti materiale (interesante paralelja e rastësishme me njëshin e Majakovskit); njëshi vetmor është vetëm një njësi mësimore (didaktike), njëshi është pa përjashtim element bashkësie dhe element material, dhe si e tillë materia vetë është një relacion (marrëdhënie).

Gjithë sa më lart u dha për të shpjeguar qendrën e përbashkët të të gjitha pikave me nisje të njëjtë (asnjëherë fjala “pikënisje” nuk ka bërë më shumë kuptim se në simulimin tonë, ku ajo është nisja e pikës dhe jo pika e nisjes.)

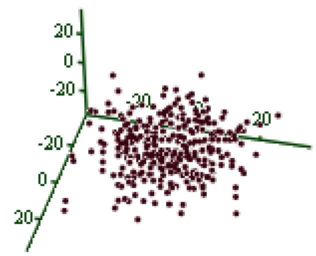
Një rezultat simulimi i Lëvizjes Brauniane të 300 pikave në 500 hapa (nga gjendja fillestare a në gjendjen b pas 500 kërcimeve,) është dhënë në figurën e mëposhtëme (simulim me MathCAD).

a)



$$\left[(W_0)^{<0>}, (W_0)^{<1>}, (W_0)^{<2>} \right]$$

b)



$$\left[(W_\nu)^{<0>}, (W_\nu)^{<1>}, (W_\nu)^{<2>} \right]$$

Simulimi i një bashkësie pikash të barabarta të lëna të lëvizin prej një pikënisjeje të përbashkët tregon se pikat kanë prirjen e natyrshme të largohen gjithnjë e më shumë nga pikënisja dhe se lëvizje, edhe në formën më parake të saj si zhvendosje hapsinore rastësore, do të thotë zmadhim i hapësirës së zënë prej pikave. Thënë ndryshe, çdo pikë, ose më saktë çdo bashkësi pikash e përmbledhur në një, “synon” të bëhet një gjithësi. Hollësitë statistikore të kësaj levizjeje të bashkësisë janë dhënë në shtjellimin e detajuar që vijon.

Katër ndryshore nevojiten për të përcaktuar qenien e një pike (grimce pa përmasë) në hapësirën tripërmasore $\mathbf{R}^3$: tri përmasat (koordinatat) në hapësirë të vendndodhjes së saj dhe koha e kaluar nga nisja e lëvizjes. Pas çdo hapi të lëvizjes pra, një vektor përkatës me katër ndryshore (4 x 1) përcakton qenien e pikës. Lëvizja e pikës supozohet diskrete (“kuantike”), si kërcimet e grimcave në lëvizjen browniane – në simulim, hapi ose kërcimi i pikës është çfarë ajo përshkoi në njësinë e kohës së një hapi, e përbashkët për bashkësinë e pikave dhe e njëjtë për çdo pikë. Diferenca midis dy vektorëve të njëpasnjëshëm është gjithashtu një vektor 4x1 me elemente zhvendosjen e pikës në hapësirën tripërmasore $\mathbf{R}^3$ dhe kohën τ të kërcimit. Duke i quajtur tre projeksionet e zhvendosjes në R3 a, b, dhe c, largësia e përshkuar prej kërcimit jepet nga masa Euklidiane λ:

$$\lambda = [a^2 + b^2 + c^2]^{1/2}$$

Ka një numër të pafundëm vlerash për dy nga tre projeksionet a, b dhe c për të përmbushur relacionin e mësipërm, ndërsa i treti, për një çift të dhënë të dy projeksioneve të tjera, mund të marrë vetëm dy vlera me shenja të kundërta. Kësisoji, λ është një ndryshore me tri gradë lirie (*degrees of freedom*). Ndërsa kufizat a, b dhe c janë të kufizuara në intevalin $[-\lambda^{½2}, \lambda^{½2}]$.

Hapat e kërcimit të një grimce në këtë lëvizje rastësore kanë përmasa të fundme, janë të rastësishme dhe të pavarura dhe formojnë një zinxhir Markov diskret; projeksionet përkatëse a, b dhe c kanë veti të njëjta. Të gjitha projeksionet në një rrafsh, le të themi a_t, ku t është bashkësia e hapave kohorë diskrete (t = {0, 1, 2, …}), formojnë një vektor me mesatare μ_a të barabartë me zero, sepse probabiliteti për të kërcyer në një drejtim “pozitiv” është e barabartë me atë të kërcimit në drejtimin “negativ”. Varianca përkatëse σ_a^2 është e fundme sepse elementet e a_t janë të fundme, dhe

$$\sigma_a^2 = [\Sigma_t (a_t^2)] / (s-1),$$

ku s është numri i hapave. Pra, kufiri i sipërm i σ_a^2 është $[s/(s-1)] * \lambda$. Për një numër të madh s kufiri i sipërm i σ_a^2 i afrohet λ. Kjo vlen edhe për σ_b^2 dhe σ_c^2. Projeksionet e hapave të kërcimit a_t, b_t dhe c_t kanë vlera të rastësishme me mesatare zero dhe varianca σ_a^2, σ_b^2 dhe σ_c^2. Për shkak se të tre variancat kanë të njëjtin kufi të sipërm dhe asnjë nga drejtimet në lëvizje nuk ka ndonjë “përparësi” mbi të tjerët (shtysa, ose “*drift*” është zero), mund të supozojmë se $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2 = \sigma^2$. Hapat e një grimce në këtë lëvizje rastore (brauniane) kanë shpërndarje Normale (sipas përkufizimit të Lëvizjes Brauniane). Projeksionet e hapave të kërcimit në $\mathbf{R^3}$ janë me shpërndarje asimptotikisht Normale me mesatare zero dhe variancë σ^2.“"”" hapat e një grimce të vetme (në këtë rast t=1, 2, …, m) mund të jepen nga vektorët $\mathbf{X}_a$, $\mathbf{X}_b$, and $\mathbf{X}_c$, ku $\mathbf{X}_i = \{i_t: i=a,b,c\}$ dhe mesatarja e $\mathbf{X}_i$ është zero dhe varianca e saj është σ^2. Duke marrë parasysh pozicionin fillestar si $((a_0, b_0, c_0)^T = (0\ 0\ 0)^T$, çdo vendndodhje e njëpasnjëshme e grimcës $\mathbf{P}_t$ është një vektor i rastësishëm me tre ndryshore:

$$\mathbf{P}_t = \Sigma_t (\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b, \mathbf{X}_c)^T$$

Një kërcim i vetëm prej *n* grimcash mund të paraqitet nga një vektor i rastësishëm trendryshorësh $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_b, \mathbf{M}_c)^T$, ku $\mathbf{M}_i$ (i = a, b, c) është grupi i projeksioneve të n hapave kërcyes në një nga të boshtet ortogonale që ngërthejnë $\mathbf{R^3}$. Të dyja bashkësitë e *f* kërcimeve *të një pike* dhe një kërcim i njëhershëm i *m* grimcave, nëse *m* dhe *f* janë të mëdha, kanë elemente (kërcime) të rastësishme, të pavarura dhe me shpërndarje asimptotike Normale. Prandaj, një kërcim i shumë grimcave është një vektor trindryshorësh $\mathbf{M} \sim N_3\ (\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma})$, ku $\mathbf{0}$ është vektori i mesatares së $(\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_b, \mathbf{M}_c)^T = (0\ 0\ 0)^T$ dhe $\boldsymbol{\sigma}^2$ është matrica 3x3 me elementet diagonale σ^2 dhe zero tjetërkund. Elementet diagonale janë variancat e of $(\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_b, \mathbf{M}_c)^T$, ndërsa elementët e tjerë përfaqësojnë kovariancën e ndryshoreve të pavarura të rastit, d.m.th., zero me përkufizim. Çdo vendndodhje e njëpasnjëshme e të gjitha *m* grimcave $\mathbf{Pm}_t$ është:

$$\mathbf{Pm}_t = \Sigma_t\, \mathbf{M}$$

Bazuar në normalitetin e **M**, ndryshorja e rastësishme $\mathbf{Pm}_t$ është gjithashtu shumëndryshorëshe Normale me Vlerë të Pritshme (mesatare) **0** dhe variancë $\boldsymbol{\sigma'}$ me elemente diagonale $(t{*}\sigma^2)$ dhe zero tjetërkund. Varianca është një funksion i *t*, ajo rritet me çdo hap të Lëvizjes Rastësore, që do të thotë se zmadhimi (inflacioni) i variancës në këtë Lëvizje është i pashmangshëm. Kjo do të thotë se pikat kanë prirjen të shkojnë në vende më tej dhe më larg nga pika e nisjes së tyre; zhvendosja e tyre ka të njëjtat gjasa të ndodhë për çdo drejtim hapsinor, dhe kjo shprehet me vektorin **0** të Vlerave të Pritshme. Sidoqoftë, një variancë e zmadhuar nuk tregon mostrën (*pattern*) e shpërndarjes së grimcave, sepse ekzistojnë mënyra të pafundme të vendndodhjes së tyre, të cilat mund të rezultojnë në të njëjtën Vlerë të Pritshme dhe ndryshueshmëri.

Po cila është shpërndarja e bashkësisë së pikave të barabarta me një pikënisje të njëjtë në hapësirën e ngërthyer prej tyre? Ky është edhe qëllimi fundor i eksperimentit të mendimit dhe simulimit matematikor. Simulimi është rrekja për vërtetim praktik e teorisë në kushte të përcaktuara. Në shtjellimin 2 më poshtë jepen hollësitë përkatëse statistikore të përllogaritjeve dhe përfundimeve të simulimit.

Largësia e shtegëtimit në kohë nga vendndodhja fillestare nuk mund të përcaktohet (parashikohet) saktësisht për një pikë të vetme difuzive. Megjithatë, për një bashkësi pikash, mund të parashikohet shpërndarja e largësive të difuzionit. Në një hap të caktuar kohor *t*, pozicioni i *p* grimcave mund të jepet nga vektorët p×1 të koordinatave $\mathbf{x_t}$, $\mathbf{y_t}$ dhe $\mathbf{z_t}$. Vektori përkatës i largësive të përshkuara ve $\mathbf{D_t}$ është

$$\mathbf{D_t = [x_t^T\, x_t + y_t^T\, y_t + z_t^T\, z_t]^{1/2}}$$

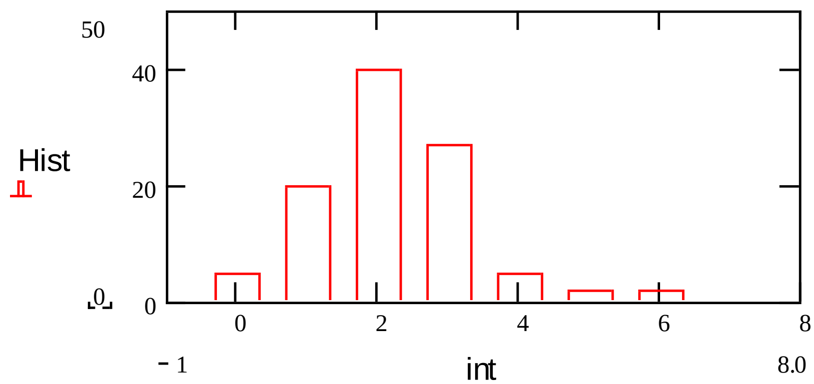
Standardizimi i $\mathbf{x_t}$, $\mathbf{y_t}$, and $\mathbf{z_t}$ përmes pjestimit me $\sigma * t^{1/2}$, e bën $(\mathbf{D_t}/t^{1/2} * \sigma)^2$ një ndryshore te rastësishme me shpërndarje *Chi-squared* me tre grade lirie $\chi^2(3)$

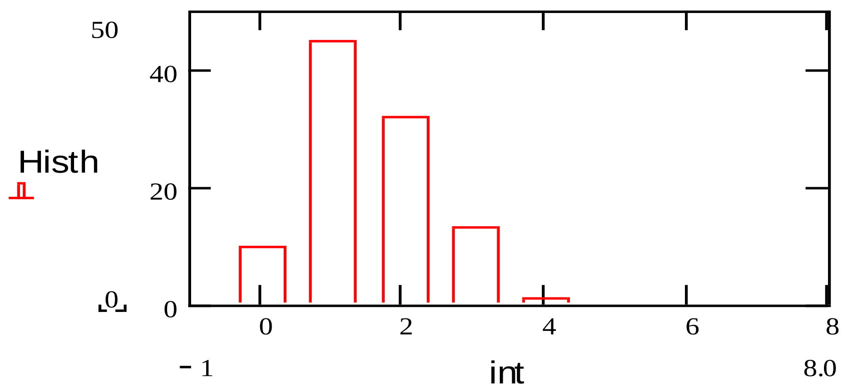
$$[\mathbf{D_t^2/}\,(t*\sigma^2)] \sim \chi^2(3),$$

ose

$$\mathbf{D_t} \sim [t*\sigma^2 * \chi^2(3)]^{1/2}$$

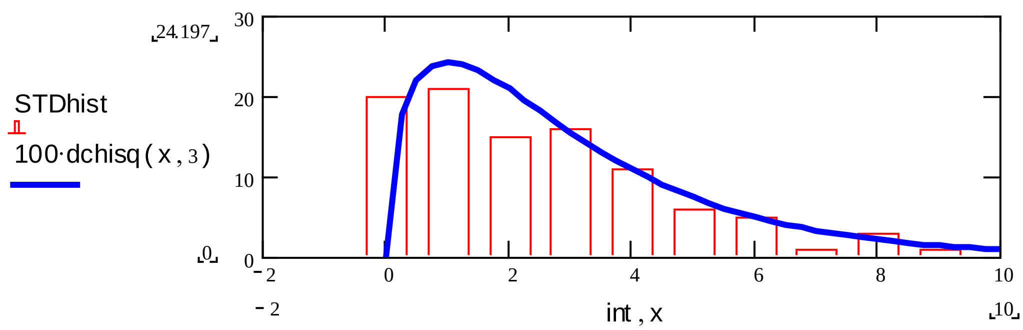
Simulimi me 100 përsëritje jep këtë shpërndarje të largësive pas 300 dhe 150 hapave.





Shpërndarja e largësive të shtegëtimit të pikave është e anuar në të djathtë dhe ndryshon statistikisht me kalimin e kohës: në simulim pas 150 kërcimesh kishin mesataren = 1,954 dhe variancën = 0,676, ndërsa pas 300 kërcimesh mesataren = 2,718 dhe variancën = 1,343.

Krahasimi i vlerave teorike (lakorja blu) dhe te simulimit të këtyre largësive (shtyllat e kuqe) jepet në figurën e mëposhtëme.



Vlera e pritshme (mesatarja statistikore) e largësisë së shtegëtimit të pikave në varësi të *f* kërcimeve është

$$\text{Largësia}(f) = [f^*\sigma^2{}^*E(\chi^2(3))]^{1/2}$$

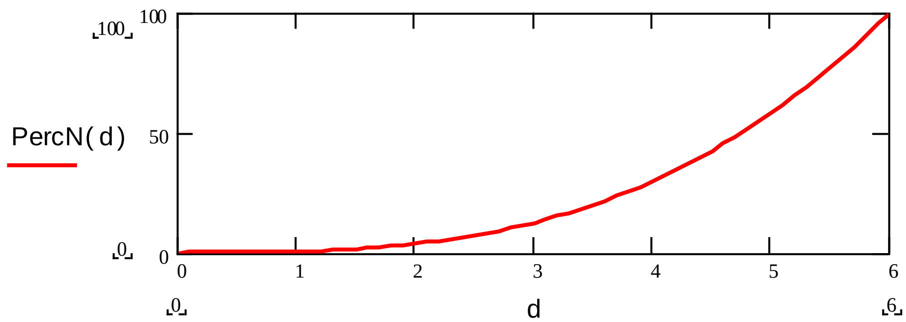
ku $E(\chi^2(3))$ është vlera e pritshme e shpërndarjes *Chi-squared* me tre shkallë lirie, e cila është 3 (e barabartë me numrin e shkallëve të lirisë). Kësisoji:

$$\text{Largësia}(f) = \sigma*(3f)^{1/2}$$

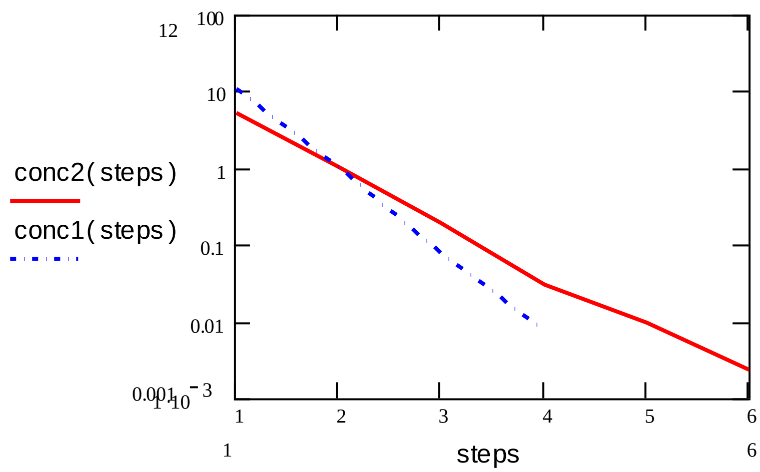
Vlera e pritshme e largësisë së përshkuar është një funksion i variancës së projeksioneve të kërcimit në $\mathbf{R}^3$ dhe rrënjës katrore të numrit të kërcimeve. Mënyra se si pikat shpërndahen nuk çon në një përqendrim të barabartë brenda vëllimit të shpërhapjes së tyre (difuzionit). Numri n(d) i grimcave (një funksion i distancës së shpërndarë d) që shpërndahen në një largësi d dhe mbajnë një përqendrim të barabartë brenda një sfere të fundme shpërhapjeje me rreze R, duhet të përmbushë lidhjen:

$$n(d) = N(d/R)^3$$

ku N është numri i përgjithshëm i grimcave në Lëvizje. Për shkak se N dhe R mund të merren si konstante, numri i grimcave duhet të rritet proporcionalisht me fuqinë e tretë të distancës së përshkuar në mënyrë që të arrihet një përqendrim konstant brenda sferës së shpërhapjes. Shpërndarja e grimcave do të ndiqte modelin e dhënë në figurën e mëposhtëme.



Ndërkohë në simulim, kjo shpërndarje ka një tjetër profil, siç tregohet në figurë (pas 300 hapash në ngjyrë të kuqe dhe 150 hapash dhënë në blu):



Përqendrimi i parashikuar i pikave varet nga numri i kërcimeve (koha) dhe largësia e përshkuar prej tyre. Vendndodhja dhe numri i kërcimeve janë të ndërlidhura; kështu që koha dhe hapësira janë të bashkëndryshueshme dhe volit të mbahet konstante njëra prej tyre dhe të përdoret tjetra si ndryshore, në mënyrë që të përftohen lakoret dypërmasore, të cilat janë më të kuptueshme se ato të barzvlefshmet tridimensionale. Përqendrimi, (numri i pikave për njësi vëllimi - këtu i marrë si sferë), është një raport ku si numëruesi ashtu edhe emëruesi janë funksione të numrit të kërcimeve (d.m.th., kohës). Vëllimi (emëruesi) përcaktohet nga largësia e përshkuar. Numri i pikave në atë vëllim është i barabartë me produktin e numrit të përgjithshëm të grimcave me gjasën mbledhëse (*cumulative probability*) që pikat të jenë brenda atij vëllimi.

Është e qartë si nga të dhënat e simulimit ashtu edhe nga parashikimet (dhe gjithashtu intuitive, si një "proces hollimi") se përqendrimi do të ulet me kalimin e kohës dhe largësisë nga pikënisja fillestare. Dallimet midis përqendrimeve në të njëjtën vendndodhje në kohë të ndryshme bëhen gjithnjë e më të vogla me rritjen e largësisë. Por dallimet janë vetëm në terma absolute. Siç del edhe nga simulimi, përpjestimet midis përqendrimeve në kohë dhe vendndodhje të ndryshme mbeten të qëndrueshme edhe në pika shumë më të largëta largësie dhe kohe. "Efekti i hollimit" nuk duhet të ngatërrohet me uniformitetin e një përqendrimi në barazpeshë. Për sa kohë që vëllimi nuk është i kufizuar (d.m.th., pikat nuk përplasen në muret e brendshme të një ene të mbyllur), nuk do të arrihet asnjë ekuilibër dhe përqendrimi (por jo numri i grimcave për gjatësinë e rrezes!) do të jetë gjithmonë më i madh në qendër të "sferës së difuzionit".

Nëse supozojmë gjatësinë e një kërcimi të barabartë me λ, atëherë

$$\lambda^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ku x, y dhe z janë projeksionet në tre boshtet ortogonale që përfshijnë $\mathbf{R}^3$. Më tej, duke supozuar $x = y = z$, atëherë

$$\lambda^2 = 3x^2, \text{ or } x = \lambda / (3)^{1/2}$$

Duke ndjekur supozimet e mësipërme dhe duke marrë parasysh x të barabartë në çdo kërcim, rezulton se σ është e barabartë me x, dhe

$$\sigma = \lambda / (3)^{1/2}$$

Bazuar në ekuacionin Einstein-Smoluchowski

$$D = \lambda^2/(2\tau)$$

Në qoftë se do ta quajmë kohën e difuzionit Td, atëherë numri i hapave t është i barabartë me Td/τ. Shprehja për distancën e difuzionit Dt bëhet

$$D_t = \sigma(3t)^{1/2}$$

dhe mund të riorganizohet më tej si

$$D_t = \sigma(3t)^{1/2} = \sigma(3Td/\tau)^{1/2} = [\lambda / (3)^{1/2}]\ (3Td/\tau)^{1/2} = \lambda(Td/\tau)$$

Nga ana tjetër

$$D^{1/2} = \lambda / (2\tau)^{1/2}$$

and

$$\lambda = (2D\tau)^{1/2}$$

Kështu që,

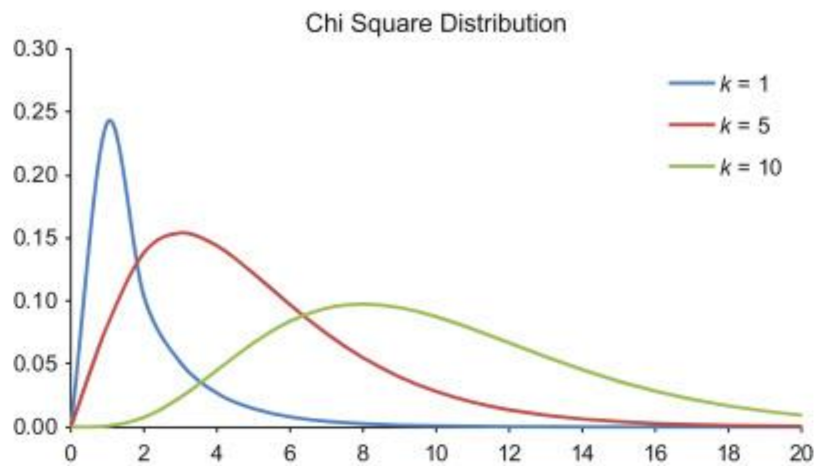
$$D_t = (2Dt)^{1/2}$$

Kjo është shprehja e njohur që lidh largësinë e difuzionit me kohën dhe konstantën e difuzionit. Mund të arrihet tek kjo shprehje vetëm duke bërë supozimet më elementare të mësipërme, të cilat janë përafrime të mira për shkak të numrit jashtëzakonisht të madh të kërcimeve për njësi të kohës dhe gjithashtu të grimcave shpërndarëse për njësi vëllimi. Difuzioni (kalimi i pikave nga përqendrimi më i lartë te më i ulëti, për shembull) para se të jetë matematikisht funksional, është stokastik dhe i vetishëm (pra i pashmangshëm dhe i përhershëm – gjithnjë pasojë e Ligjit të Numrave të Mëdhenj), dhe ajo që e quajmë “gradient” lëvizjeje është veç një rrjedhim i natyrshëm i lëvizjes. Për të, lëvizja rastësore e pikave materiale është kusht i mjaftueshëm.

Shpërndarja e bashkësisë së pikave të njëjta nga një pikënisje e njëjtë në hapsirën trepërmasore, është e përcaktuar dhe formësohet nga shpërndarja *Chi Squared* (χ^2, një anëtare dhe rast i veçantë i shpërndarjes *Gamma*) me tre gradë lirie. Natyrisht, dy faktorë të tjerë janë koha dhe varianca e lëvizjes, por kjo e fundit është veti e brendshme e bashkësisë së pikave, ndërsa koha një faktor i jashtëm për sistemin (eksogjen). Shpërndarja *Chi Squared* është josimetrike dhe në të dy skajet e saj, majtas dhe djathtas, përmbledh elementet me arritje përkatësisht më të vogla ose më të mëdha se pjesa tjetër e bashkësisë. Pabarazia është e pritshme dhe natyrore. Është përfundimi i çdo gjendjeje fillestare, edhe i asaj me barazinë më të plotë të mundshme, një shoqëri pikash materiale me aktivitet të njëjtë lëvizjeje, krejtësisht të pavarura dhe të pakufizuara në lëvizjen e tyre.

Vetia më e spikatur e shpërndarjes $\chi^2(k)$, ku k është numri i gradëve të lirisë, është se vlera e pritshme e saj është k. Liria përcakton drejtpërdrejt arritjen, edhe në mënyrë sasiore. Dhe po kështu, siç mund të merret me mend prej vetë përkufizimit, edhe varianca (ndryshueshmëria e përbërësve të bashkësisë me shpërndarje $\chi^2(k)$) është e brabartë me 2k. Liria është e lidhur në mënyrë drejtvizore me dallimet midis elementëve të bashkësisë, me pabarazinë mes tyre. Sa më i lirë, aq më i pabarabartë dhe aq më të mëdha pritshmëritë e arritjes. Kjo thjeshtësi në dy *momentet* e shpërndarjes, vlerës së pritshme dhe ndryshueshmërisë së anëtarëve të bashkësisë, në një kohë kur çdo shpërndarje tjetër ka shprehje të ndërlikuara, futet në “çuditë mrekullisht të dhëna të natyrës”. Nuk duhet harruar se Vlera e Pritshme është një zvogëlim i përmasave (*dimension reduction*) të ngjarjes shumëpërmasore në një numër të vetëm (siç është edhe ndryshueshmëria), e në këtë kuptim ato janë gjendje mendore shpesh të paqena në formë të prekshme, përshkruese por assesi shpjeguese, dhe vetëm thjeshtime të volitshme për përvetim mendor. Është e njëjta marrëdhënie si ajo midis jetës dhe arritjes.

Lakoret e shpërndarjes së dendurisë së shpërndarjes të përcaktuara nga gradët e lirisë u ngjajnë valëve që shtyhen djathtas me rritjen e lirisë, e dhënë në mënyrë sasiore nga parametri i gradëve të lirisë k.



Me rritjen e lirisë, kulmi i dendurisë së gjendjes së elementeve arrihet në vlera (lexo "arritje") vazhdimisht më të mëdha dhe masa e vlerave të ndryshme që këta elemente marrin (*support set*) bëhet gjithnjë e më e madhe: Liria nënkupton mundësi dhe sendërtime më të mëdha.

Për t'u kthyer prapë te Solzhenicini: edhe po të lindnin të barabartë, njerëzit do të përfundonin të pabarabartë, mjaft që të jetonin. Lëvizje (pra, jetë) do të thotë pashmangshërisht pabarazi.

Shkëlqim Çela, PhD
Senior Data Scientist